

«Στάσιμο Κύμα»

(Μορφές της εξίσωσης του στάσιμου κύματος)

Η μελέτη που ακολουθεί, περιέχει χρήσιμες πληροφορίες για τις μορφές της εξίσωσης του στάσιμου κύματος και απευθύνεται στους μαθητές της Γ Λυκείου θετικού προσανατολισμού.

Για το «στάσιμο κύμα» που αναπτύσσεται κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου, η εξίσωση που συνήθως παρουσιάζεται είναι της μορφής

$$y = 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \eta \mu \frac{2\pi}{T} t \quad \text{ή} \quad y = 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \eta \mu \omega t \quad (1)$$

Όπου A: το πλάτος των κυμάτων από όπου προέκυψε το στάσιμο,

x: η συντεταγμένη του σημείου επί του γραμμικού μέσου,

λ: το μήκος κύματος,

T: η περίοδος του κύματος.

Η επιλογή στη μορφή της εξίσωσης του στάσιμου κύματος, πρέπει να γίνεται αφού αρχικά είναι γνωστές ορισμένες πληροφορίες. Έτσι για την παραπάνω μορφή είναι γνωστά τα εξής:

● Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Σ(x) είναι $A' = 2A \left| \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right|$ από όπου φαίνεται ότι η αρχή $x = 0$ έχει $A' = 2A \sin 0$ ή $A' = 0$ δηλαδή η αρχή είναι κοιλία.

● Από την εξίσωση απομάκρυνσης (1) για $x = 0$ γίνεται $y = 2A \eta \mu \omega t$ (2)

και η εξίσωση ταχύτητας ταλάντωσης για το ίδιο σημείο προκύπτει $v = 2\omega A \cos \omega t$ (3),

οπότε την $t = 0$ από την (2) είναι $y = 0$ και από την (3) έχουμε $v = v_{\max} = 2\omega A > 0$.

Συμπέρασμα Η μορφή $y = 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \eta \mu \frac{2\pi}{T} t$ της εξίσωσης του στάσιμου κύματος σημαίνει

ότι η αρχή $x = 0$ είναι κοιλία, δηλαδή έχει $A' = 2A$, η οποία τη στιγμή $t = 0$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της με θετική ταχύτητα δηλαδή $v = v_{\max} > 0$.

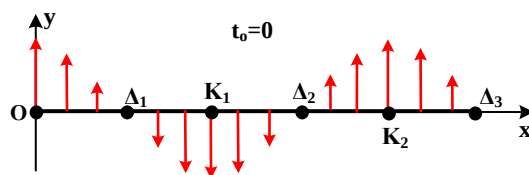
Για παράδειγμα στο σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο με τα διανύσματα των ταχυτήτων την

$t_0 = 0$, ενός τέτοιου στάσιμου με εξίσωση

$$y = 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \eta \mu \frac{2\pi}{T} t \quad \text{που έχει}$$

αναπτυχθεί κατά μήκος μιας χορδής, με

την αρχή της O ελεύθερη, άρα κοιλία, ενώ το άλλο άκρο της Δ_3 να είναι ακλόνητο άρα δεσμός.



● Γενικά η εξίσωση του στάσιμου κύματος μπορεί να πάρει και άλλες μορφές αρκεί οι μεταβλητές x και t να μη βρίσκονται στον ίδιο τριγωνομετρικό αριθμό.

Η γενική μορφή της εξίσωσης του στάσιμου κύματος μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \theta_0\right) \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_0\right) \text{ όπου}$$

● η θ_0 καθορίζεται από τις αρχικές χωρικές συνθήκες, δηλαδή από την

$$A' = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \theta_0\right) \text{ αν δοθεί το } A' \text{ στο } x=0 \text{ τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε την } \theta_0.$$

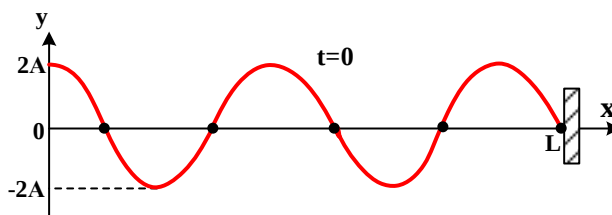
● η ϕ_0 καθορίζεται από τις αρχικές χρονικές συνθήκες δηλαδή αν δίνεται η θέση y του $x=0$ τη στιγμή $t=0$ και τότε από την $y' = A' \eta\mu(\omega t + \phi_0)$ προκύπτει η ϕ_0 .

για παράδειγμα η μορφή $y = 2A \sin\frac{2\pi x}{\lambda} \eta\mu\frac{2\pi}{T}t$ έχει $\theta_0 = 0$ διότι στο $x=0$ είναι $A' = 2A$

(κοιλία) και $\phi_0 = 0$ διότι την $t=0$ το $x=0$ έχει $y=0$ και $v_{\max} > 0$.

Εφαρμογή 1^η

Στο σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο τη στιγμή $t=0$ στάσιμου κύματος, που έχει δημιουργηθεί σε χορδή μήκους L όπου όλα τα μέρη του ελαστικού



μέσου έχουν τη μέγιστη απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας τους.

α. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος κατά μήκος της χορδής.

β. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του στάσιμου στη χορδή τη στιγμή $t_1 = \frac{T}{2}$

Δίνονται : λ, A, T .

Λύση:

α. Αρχικά θα βρεθεί

● η αρχική φάση θ_0 με τις αρχικές χωρικές συνθήκες.

Στο στιγμιότυπο που δόθηκε φαίνεται ότι στο $x=0$ είναι $A' = 2A$, έτσι με τη γενική μορφή

του στάσιμου κύματος $y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \theta_0\right) \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_0\right)$ από όπου το

$$A' = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \theta_0\right), \text{ με } x=0 \text{ είναι } A' = 2A \sin\theta_0 \text{ οπότε } 2A = 2A \sin\theta_0 \text{ ή } \sin\theta_0 = 1 \text{ ή}$$

$$\theta_0 = 0 \text{ οπότε για το σημείο } \Sigma(x) \text{ είναι } A' = 2A \sin\frac{2\pi x}{\lambda}.$$

● Η αρχική φάση ϕ_0 προσδιορίζεται με τις αρχικές χρονικές συνθήκες.

Για το $x = 0$, η απομάκρυνση δίνεται $y = 2A\eta\mu(\omega \cdot t + \phi_0)$, η οποία τη στιγμή $t_0=0$ δόθηκε στο

σχήμα $y = +2A$ άρα $+2A = 2A\eta\mu\phi_0$ από όπου προκύπτει $\eta\mu\phi_0 = 1$ ή $\phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ οπότε η

γενική εξίσωση γίνεται $y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ ή $y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{T}t$

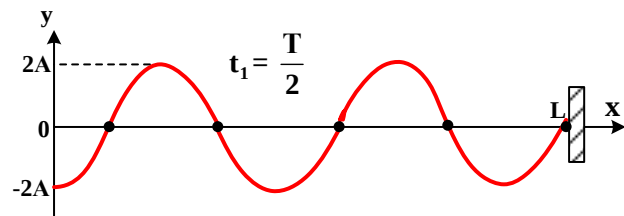
Συμπέρασμα Η μορφή $y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{T}t$ της εξίσωσης του στάσιμου κύματος

σημαίνει ότι η αρχή $x = 0$ είναι κοιλία, δηλαδή έχει $A' = 2A$, η οποία τη στιγμή $t = 0$

βρίσκεται στο $y = +2A$ με ($v = 0$) άρα τότε είναι $\theta_0 = 0$ και $\phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

β. Το στιγμιότυπο τη στιγμή $t_1 = \frac{T}{2}$ προκύπτει είτε με το συλλογισμό ότι μετά από χρόνο $\frac{T}{2}$

τα σημεία της χορδής θα βρεθούν στις συμμετρικές θέσεις ως προς τον άξονα (Ox),



είτε με την εφαρμογή της εξίσωσης

δηλαδή $y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}$ ή $y = -2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}$, τελικά έχουμε το στιγμιότυπο της

χορδής όπως φαίνεται στο σχήμα.

Εφαρμογή 2^η

Σε μια ελαστική χορδή μήκους L που έχει ακλόνητα άκρα, έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα. Αν θεωρηθεί ο άξονας Ox κατά μήκος της χορδής, με αρχή O στο ένα της άκρο άρα δεσμός, να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος στις περιπτώσεις όπου τη στιγμή $t_0 = 0$ η πρώτη κοιλία μετά την αρχή να βρίσκεται:

α. στην αρχή των απομακρύνσεών της με $v_{\max} > 0$

β. στη μέγιστη θετική απομάκρυνσής της ($v = 0$)

Δίνονται : λ , A , T .

Λύση:

α. Από τη γενική μορφή του στάσιμου κύματος $y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \theta_0\right)\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_0\right)$

● η αρχική φάση θ_0 προκύπτει από τις αρχικές χωρικές συνθήκες.

Με το $A' = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \theta_0\right)$, στο πρόβλημά μας στο $x = 0$ ως ακλόνητο άκρο είναι δεσμός

άρα $A' = 0$ ή $\sin\theta_0 = 0$ οπότε $\theta_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ και $A' = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right)$ ή $A' = -2A \eta\mu \frac{2\pi x}{\lambda}$, η δε

εξίσωση παίρνει μορφή $y = -2A \eta\mu \frac{2\pi x}{\lambda} \eta\mu(\omega t + \phi_0)$ (1)

• Η αρχική φάση ϕ_0 προσδιορίζεται με τις αρχικές χρονικές συνθήκες της πρώτης μετά την αρχή κοιλίας K_1 για την οποία είναι $x = \frac{\lambda}{4}$ έτσι για την K_1

η εξίσωση απομάκρυνσης είναι $y = -2A \eta\mu \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} \eta\mu(\omega t + \phi_0)$ ή $y = -2A \eta\mu(\omega t + \phi_0)$ και με

την εξίσωση ταχύτητας ταλάντωσης $v = -2\omega A \sin(\omega t + \phi_0)$ ή $v = -v_{\max} \sin(\omega t + \phi_0)$, από τις οποίες με $t = 0$ είναι $y = -2A \eta\mu\phi_0$ (2) και $v = -v_{\max} \sin\phi_0$ (3).

α. Αν η κοιλία K_1 τη στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην αρχή των απομακρύνσεων είναι $y = 0$ με $v = v_{\max} > 0$ τότε από την (3) έχουμε $v_{\max} = -v_{\max} \sin\phi_0$ ή $\sin\phi_0 = -1$ έτσι $\phi_0 = \pi \text{ rad}$ και από την (2) είναι $y = 0$.

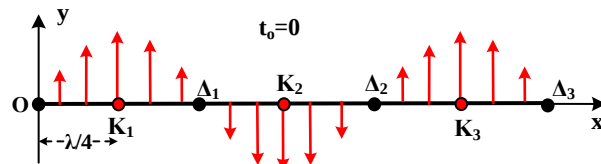
Έτσι η εξίσωση $y = -2A \eta\mu \frac{2\pi x}{\lambda} \eta\mu(\omega t + \phi_0)$ γίνεται $y = -2A \eta\mu \frac{2\pi x}{\lambda} \eta\mu(\omega t + \pi)$ και

$$\text{τελικά } y = 2A \eta\mu \frac{2\pi x}{\lambda} \eta\mu \frac{2\pi}{T} t$$

Για παράδειγμα στο σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο με τα διανύσματα των ταχυτήτων την

$t_0 = 0$, ενός τέτοιου στάσιμου με

εξίσωση $y = 2A \eta\mu \frac{2\pi x}{\lambda} \eta\mu \frac{2\pi}{T} t$ που



έχει αναπτυχθεί κατά μήκος μιας

χορδής, με ακλόνητα άκρα άρα δεσμοί.

β. Αν η κοιλία K_1 τη στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στο $y = +2A$ τότε από την (2) έχουμε

$2A = -2A \eta\mu\phi_0$ ή $\eta\mu\phi_0 = -1$ άρα $\phi_0 = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$. Έτσι η εξίσωση $y = -2A \eta\mu \frac{2\pi x}{\lambda} \eta\mu(\omega t + \phi_0)$

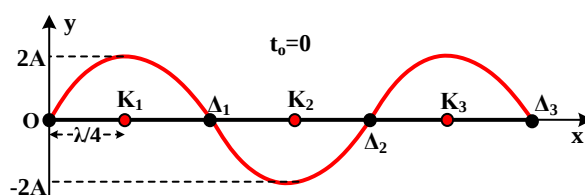
γίνεται $y = -2A \eta\mu \frac{2\pi x}{\lambda} \eta\mu\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)$ ή $y = 2A \eta\mu \frac{2\pi x}{\lambda} \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{T} t$

Για παράδειγμα στο σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο τη $t_0 = 0$, ενός τέτοιου στάσιμου με

εξίσωση $y = 2A \eta\mu \frac{2\pi x}{\lambda} \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{T} t$ που

έχει αναπτυχθεί κατά μήκος μιας

χορδής, με ακλόνητα άκρα άρα δεσμοί.



Ανακεφαλαίωση

Η γενική μορφή της εξίσωσης του στάσιμου κύματος είναι

$$y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \theta_0\right) \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right)$$

θ_0 : από τις αρχικές χωρικές συνθήκες, φ_0 από τις αρχικές χρονικές συνθήκες.

Χαρακτηριστικές μορφές της εξίσωσης

A. Όταν η αρχή $x = 0$ είναι κοιλία.

α. Συνήθης μορφή $y = 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \eta\mu \frac{2\pi}{T} t$ η αρχή $x = 0$ είναι κοιλία και την $t = 0$ διέρχεται

από τη θέση ισορροπίας με $v = v_{\max} > 0$.

Τότε είναι $\theta_0 = 0$ και $\varphi_0 = 0$.

β. Μορφή $y = 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{T} t$ η αρχή $x = 0$ είναι κοιλία και την $t = 0$ βρίσκεται στο

$y = +2A$, όπου βέβαια είναι $v = 0$.

Τότε είναι $\theta_0 = 0$ και $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

B. Όταν η αρχή $x = 0$ είναι δεσμός.

α. Μορφή $y = 2A \eta\mu \frac{2\pi x}{\lambda} \eta\mu \frac{2\pi}{T} t$ η αρχή $x = 0$ είναι δεσμός και την $t = 0$ η πρώτη κοιλία

μετά την αρχή, βρίσκεται στην αρχή των

απομακρύνσεων με $v = v_{\max} > 0$

Τότε $\theta_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ και $\varphi_0 = \pi \text{ rad}$.

β. Μορφή $y = 2A \eta\mu \frac{2\pi x}{\lambda} \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{T} t$ η αρχή $x = 0$ είναι δεσμός και την $t = 0$ η πρώτη κοιλία

μετά την αρχή, βρίσκεται στη μέγιστη θετική

απομάκρυνση $y = +2A$, όπου βέβαια είναι $v = 0$.

Τότε $\theta_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ και $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$

Συμπέρασμα Πρέπει να προσέχουμε την επιλογή της εξίσωσης του στάσιμου κύματος – εκτός αν δίνεται από την εκφώνηση – διότι αυτή εξαρτάται από τις αρχικές χωρικές και χρονικές συνθήκες, οι οποίες βέβαια θα παρέχονται από την εκφώνηση του θέματος.

Κεφαλός Ευθύμιος

Φυσικός – συγγραφέας.

mail: barkefala@yahoo.gr